

# ESTRATEGIAS COOPERATIVAS PARA UN JUEGO DIFERENCIAL DE CONTAMINACIÓN AMBIENTAL

**ARRANZ SOMBRÍA M.R.**

Departamento de Economía Aplicada  
Universidad de Valladolid  
correo-e: [rosa@eco.uva.es](mailto:rosa@eco.uva.es)

**SOTO TORRES M.D.**

Departamento de Economía Aplicada  
Universidad de Valladolid  
correo-e: [lolasoto@eco.uva.es](mailto:lolasoto@eco.uva.es)

**FERNÁNDEZ LECHÓN R.**

Departamento de Economía Aplicada  
Universidad de Valladolid  
correo-e: [ramonfer@eco.uva.es](mailto:ramonfer@eco.uva.es)

## Resumen

En este trabajo, se considera un juego diferencial sobre un horizonte temporal finito para modelar el problema de los costes asociados a dos coaliciones internacionales afectadas tanto por el mantenimiento de cuotas de emisión de CO<sub>2</sub> como por los efectos de la contaminación sobre su medio ambiente. Se estudian las diferentes estrategias que podrían seguir cada coalición si deciden llevar a cabo un proceso de negociación mediante la ponderación de sus objetivos. El trabajo también busca, entre las soluciones eficientes, aquellas estrategias que satisfacen adicionales condiciones incluyendo el poder de negociación de cada coalición y se presenta un desarrollo numérico para mostrar toda la metodología utilizada.

*Palabras clave:* Frontera de Pareto, solución de Nash no simétrica, solución de Kalai-Smorodinsky.

## 1. Introducción

Las concentraciones de los gases que contribuyen a aumentar el efecto invernadero, entre ellos el CO<sub>2</sub>, ha sufrido en los últimos años un aumento considerable. Debido a las repercusiones que tiene este problema en el cambio climático, entre otros factores, se ha experimentado una creciente preocupación al respecto en todos los países del mundo. Fruto de esta situación, ha sido la celebración de muchas conferencias con el objeto de estudiar e intentar poner solución al problema. Uno de estos encuentros se celebró en Kyoto en 1997, donde las Naciones Unidas adoptaron el conocido protocolo de Kyoto donde se estableció como objetivo reducir las emisiones de gases de efecto invernadero en los países industrializados en un 5% por debajo de los niveles de 1990. Este objetivo debe alcanzarse en el promedio de las emisiones que se realicen en el periodo 2008-2012.

La reducción del nivel de emisiones no es tarea sencilla ni exenta de costes. Podemos centrarnos en el aspecto de reducción de emisiones que podría implicar, casi con seguridad, un cambio en la actividad humana e industrial de todos los países y fundamentalmente de los más desarrollados, que son los que más contaminan. Por otra parte, el mantener las emisiones en los niveles actuales también implica costes asociados a los altos niveles de contaminación. En cualquier caso, el problema de la contaminación medioambiental en general y de la atmósfera en particular, no es exclusivo de unos países. Todas las naciones se ven afectadas en menor o mayor medida y todos los países han de contribuir a su solución, pues los beneficios derivados de la disminución de la contaminación en unas zonas, se extiende a todo el globo.

La magnitud del problema ha provocado que surjan muchos trabajos, desde distintos enfoques, que tratan de estudiarlo. Uno de ellos es el realizado por Kaitala y Pohjola (1995) que formulan un juego diferencial de horizonte infinito. En él consideran que hay dos grupos de países con diferente vulnerabilidad ante el problema del calentamiento y que se puede establecer una negociación entre ellos. En este

trabajo, basado en el desarrollado por Kaitala y Pohjola, se plantea un juego diferencial con horizonte finito. El objetivo es tener en cuenta los planes de reducción de emisiones propuestas en el protocolo de Kyoto. El trabajo realizado está dividido en cuatro secciones. En la siguiente se desarrolla el modelo y se determina la frontera eficiente utilizando el método de la ponderación de objetivos. En la sección tercera, se exponen los diferentes métodos de solución de conflictos aplicados y en la cuarta se realiza un desarrollo numérico. Por último, el apartado quinto recoge las conclusiones.

## 2. Modelo y soluciones eficientes

Se consideran dos bloques de naciones  $I_1$ ,  $I_2$  que deben compartir una atmósfera contaminada por  $\text{CO}_2$ . Cada coalición debe soportar dos tipos de costes, uno de ellos depende del nivel de sus emisiones y el otro de la concentración de  $\text{CO}_2$  en la atmósfera. Denotemos por  $Q(t)$  la desviación de la concentración de  $\text{CO}_2$  con respecto a su nivel en 1990 y por  $e_i(t)$ ,  $i = 1, 2$ , el nivel de las emisiones de cada bloque de naciones en el instante  $t$ . Sean además  $C_i(e_i(t))$  y  $D_i(Q(t))$ ,  $i = 1, 2$ , los costes anteriormente mencionados, que deben soportar cada una de las coaliciones. El problema que se plantean las coaliciones  $I_1$  e  $I_2$  es determinar sus niveles de emisiones  $e_i(t)$  en el periodo  $[0, T]$ , de tal forma que el coste asociado a un determinado nivel de emisión y su repercusión en la concentración de  $\text{CO}_2$  sea lo más bajo posible. Análogamente al trabajo desarrollado por Kaitala y Pohjola, se supone que la evolución del exceso de  $\text{CO}_2$  en la atmósfera viene determinado por la ecuación diferencial

$$Q'(t) = \sigma(e_1(t) + e_2(t)) - \beta Q(t),$$

donde  $\sigma$  y  $\beta$  son parámetros medioambientales positivos que recogen la intervención de la naturaleza sobre las emisiones y la contaminación existente. Si tomamos como momento  $t = 0$ , el año de referencia 1990, entonces se verifica  $Q(0) = 0$ . En esta situación, el problema que debe resolver cada grupo de países es determinar el nivel de emisiones en cada instante, que minimiza el valor actual de los costes en el periodo

$[0, T]$ . Es decir, determinar  $e_i(t)$  que minimiza el funcional

$$\int_0^T e^{-\rho t} [C_i(e_i(t)) + D_i(Q(t))] dt,$$

donde  $\rho$  es la tasa de descuento, que se supone la misma para ambos bloques. Se ha de tener en cuenta la ecuación diferencial que debe satisfacer  $Q(t)$ .

Tenemos formulado un juego diferencial con dos jugadores, de suma no nula, sobre un horizonte temporal finito. Si suponemos que ambas coaliciones acuerdan cooperar en la búsqueda de soluciones a sus problemas, nos encontramos ante la minimización de dos objetivos sujetos a la restricción representada por la ecuación diferencial que determina la evolución de la contaminación ambiental. Para encontrar las soluciones cooperativas, utilizamos el procedimiento de las ponderaciones de los funcionales objetivos y el problema a resolver es:

$$\begin{aligned} \min \quad & \alpha \int_0^T e^{-\rho t} [C_1(e_1(t)) + D_1(Q(t))] dt + (1 - \alpha) \int_0^T e^{-\rho t} [C_2(e_2(t)) + D_2(Q(t))] dt \\ \text{s.a:} \quad & Q'(t) = \sigma(e_1(t) + e_2(t)) - \beta Q(t) \\ & Q(0) = 0 \end{aligned}$$

para  $\alpha \in (0, 1)$ . El jugador cooperativo tratará de encontrar las funciones  $e_{1\alpha}$  y  $e_{2\alpha}$  que minimicen el funcional objetivo. Denotamos por  $J_1(\alpha), J_2(\alpha)$  el valor de los funcionales correspondientes a cada bloque de naciones  $I_1, I_2$  respectivamente, cuando los niveles de las emisiones son  $e_{1\alpha}$  y  $e_{2\alpha}$ .

Para cada  $\alpha$ , resolvemos el problema planteado suponiendo funciones de costes cuadráticas

$$\begin{aligned} C_i(e_{i\alpha}(t)) &= \frac{1}{2} c_i (e_{i\alpha}(t) - e_i^m)^2, \\ D_i(Q_\alpha(t)) &= d_i [Q_\alpha(t)]^2, \end{aligned}$$

donde  $c_i, d_i$  son parámetros positivos que recogen las distintas repercusiones que sobre cada una de las coaliciones pueden tener los niveles de las emisiones y las concentraciones de  $\text{CO}_2$ . Las constantes  $e_i^m$  son unas cuotas de emisión para cada

uno de los bloques fijadas mediante un acuerdo. El hamiltoniano para el problema es

$$H(e_{1\alpha}, e_{2\alpha}, \psi_\alpha, Q_\alpha) = e^{-\rho t} \left[ \frac{\alpha}{2} [c_1(e_{1\alpha} - e_1^m)^2 + d_1 Q_\alpha^2] + \frac{1-\alpha}{2} [c_2(e_{2\alpha} - e_2^m)^2 + d_2 Q_\alpha^2] \right] + \psi_\alpha [\sigma(e_{1\alpha} + e_{2\alpha}) - \beta Q_\alpha]$$

donde  $\psi_\alpha(t)$  es la variable de coestado. Las condiciones necesarias para el problema, que también son suficientes debido a las condiciones de convexidad de las funciones que intervienen, son:

$$\left. \begin{aligned} \psi'_\alpha(t) &= -[e^{-\rho t} (\alpha d_1 Q_\alpha(t) + (1-\alpha)d_2 Q_\alpha(t)) - \beta \psi_\alpha(t)] \\ e^{-\rho t} \alpha c_1 (e_{1\alpha}(t) - e_1^m) + \psi_\alpha(t) \sigma &= 0 \\ e^{-\rho t} (1-\alpha) c_2 (e_{2\alpha}(t) - e_2^m) + \psi_\alpha(t) \sigma &= 0 \\ Q'_\alpha(t) &= \sigma(e_{1\alpha}(t) + e_{2\alpha}(t)) - \beta Q_\alpha(t) \\ Q_\alpha(0) = 0, \quad \psi_\alpha(T) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

De donde se deduce que los controles que resuelven el problema han de satisfacer

$$\begin{aligned} e_{1\alpha}(t) &= e_1^m - \frac{\sigma}{\alpha c_1} \psi_\alpha(t) e^{\rho t}, \\ e_{2\alpha}(t) &= e_2^m - \frac{\sigma}{(1-\alpha)c_2} \psi_\alpha(t) e^{\rho t}. \end{aligned}$$

Y por tanto, las funciones que determinan la evolución de las variables de estado,  $Q_\alpha(t)$ , y coestado,  $\psi_\alpha(t)$ , han de ser soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\left. \begin{aligned} \psi'_\alpha(t) &= -e^{-\rho t} (\alpha d_1 Q_\alpha(t) + (1-\alpha)d_2 Q_\alpha(t)) + \beta \psi_\alpha(t) \\ Q'_\alpha(t) &= \sigma(e_1^m + e_2^m) - \sigma^2 e^{\rho t} \psi_\alpha(t) \left( \frac{1}{\alpha c_1} + \frac{1}{(1-\alpha)c_2} \right) - \beta Q_\alpha(t) \end{aligned} \right\}$$

Llamando  $Z_\alpha(t) = e^{\rho t} \psi_\alpha(t)$ , el sistema anterior se transforma en un sistema lineal de coeficientes constantes en las variables  $Z_\alpha, Q_\alpha$ , que tiene por matriz asociada

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} \beta + \rho & -(\alpha d_1 + (1-\alpha)d_2) \\ -\sigma^2 \left( \frac{1}{\alpha c_1} + \frac{1}{(1-\alpha)c_2} \right) & -\beta \end{pmatrix}.$$

Los valores propios de la matriz  $A(\alpha)$  vienen dados por la expresión

$$\lambda_i(\alpha) = \frac{1}{2} \left( \rho \pm \sqrt{\rho^2 + 4\sigma^2 \left( \frac{1}{\alpha c_1} + \frac{1}{(1-\alpha)c_2} \right) (\alpha d_1 + (1-\alpha)d_2) + 4(\beta + \rho)\beta} \right).$$

Es obvio que uno es positivo y el otro negativo, lo que implica que el punto de equilibrio existente, que representamos por  $(Z_\alpha^*, Q_\alpha^*)$ , es un punto de silla. Sea  $v_i(\alpha)$  el vector propio asociado al autovalor  $\lambda_i(\alpha)$  tal que

$$v_i(\alpha) = \left( \frac{\alpha d_1 + (1-\alpha)d_2}{\beta + \rho - \lambda_i(\alpha)}, 1 \right) = (v_{1i}(\alpha), v_{2i}(\alpha)).$$

Una vez encontrados los valores propios, vectores propios y el equilibrio, tenemos la solución general del sistema

$$\begin{aligned} Z_\alpha(t) &= Z_\alpha^* + K_1(\alpha)v_{11}(\alpha)e^{\lambda_1(\alpha)t} + K_2(\alpha)v_{12}(\alpha)e^{\lambda_2(\alpha)t} \\ Q_\alpha(t) &= Q_\alpha^* + K_1(\alpha)v_{21}(\alpha)e^{\lambda_1(\alpha)t} + K_2(\alpha)v_{22}(\alpha)e^{\lambda_2(\alpha)t} \end{aligned}$$

Los valores de las constantes  $K_1(\alpha), K_2(\alpha)$  se obtienen teniendo en cuenta que  $Q_\alpha(0) = 0$  y que  $\psi_\alpha(T) = 0 = Z_\alpha(T)$ . El resultado es

$$\begin{aligned} K_1(\alpha) &= \frac{Z_\alpha^* - Q_\alpha^* v_{12}(\alpha) e^{\lambda_2(\alpha)T}}{v_{12}(\alpha) e^{\lambda_2(\alpha)T} - v_{11}(\alpha) e^{\lambda_1(\alpha)T}}, \\ K_2(\alpha) &= \frac{Q_\alpha^* v_{11}(\alpha) e^{\lambda_1(\alpha)T} - Z_\alpha^*}{v_{12}(\alpha) e^{\lambda_2(\alpha)T} - v_{11}(\alpha) e^{\lambda_1(\alpha)T}}. \end{aligned}$$

Determinadas las funciones de estado y coestado, podemos evaluar los correspondientes funcionales pues

$$\begin{aligned} e_{1\alpha}(t) - e_1^m &= \frac{\sigma}{\alpha c_1} \psi_\alpha(t) e^{\rho t} = \frac{\sigma}{\alpha c_1} Z_\alpha(t), \\ e_{2\alpha}(t) - e_2^m &= \frac{\sigma}{(1-\alpha)c_2} \psi_\alpha(t) e^{\rho t} = \frac{\sigma}{(1-\alpha)c_2} Z_\alpha(t). \end{aligned}$$

De donde se deduce que

$$\begin{aligned} J_1(\alpha) &= \frac{1}{2} \int_0^T e^{-\rho t} \left[ \frac{\sigma^2}{\alpha^2 c_1^2} [Z_\alpha(t)]^2 + d_1 [Q_\alpha(t)]^2 \right] dt, \\ J_2(\alpha) &= \frac{1}{2} \int_0^T e^{-\rho t} \left[ \frac{\sigma^2}{(1-\alpha)^2 c_2^2} [Z_\alpha(t)]^2 + d_2 [Q_\alpha(t)]^2 \right] dt. \end{aligned}$$

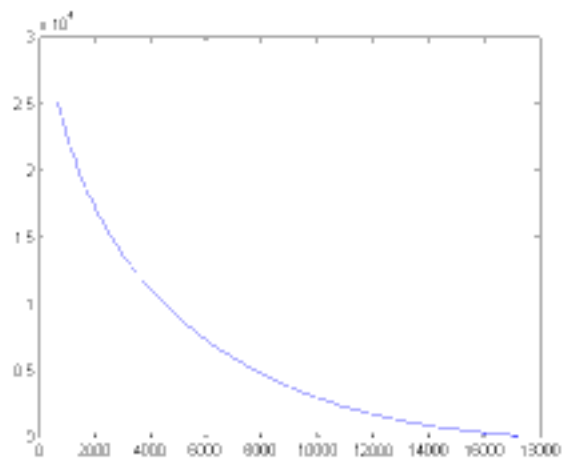


Figura 1: Frontera eficiente

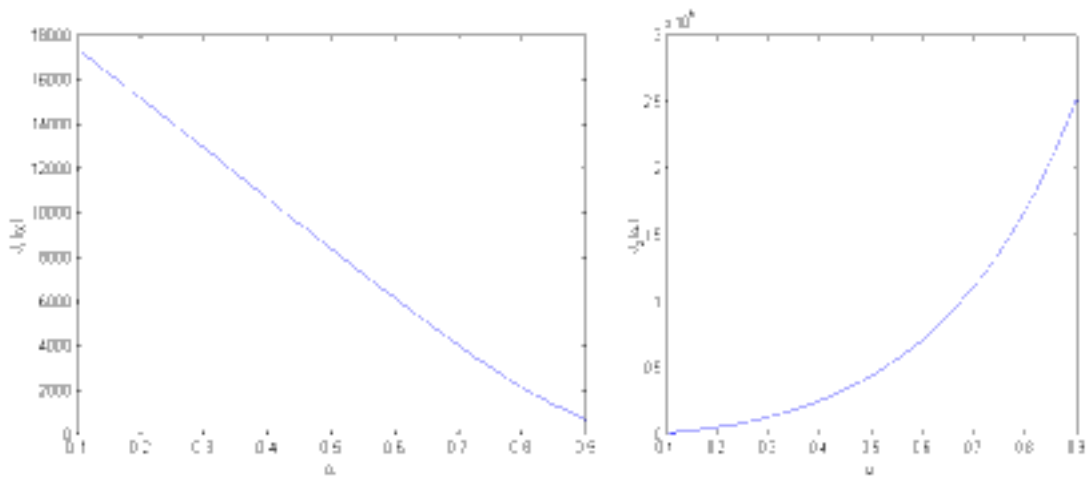


Figura 2: Funcionales para las dos coaliciones

Los puntos  $(J_1(\alpha), J_2(\alpha))$  con  $\alpha \in (0, 1)$  determinan la frontera eficiente que aparece representada en la figura 1, para los valores de los parámetros con los que se desarrolla la sección 4. Asimismo, en la figura 2 tenemos representados los valores de los funcionales, en función de  $\alpha$ , para cada una de las coaliciones. Como se puede observar en la gráfica las funciones son estrictamente monótonas y además son funciones continuas. Se puede apreciar que si  $\alpha$  tiende a 1, entonces  $J_1$  tiende a 0 y  $J_2$  a  $\infty$ , lo que implica que la disminución de los costes para  $I_1$  se produce a costa del aumento de ellos para  $I_2$ . Una situación similar se tiene cuando  $\alpha$  tiende a 0.

### 3. Metodología de Resolución

Desde el trabajo de Nash(1950), se ha dedicado mucho esfuerzo al desarrollo de diferentes conceptos de solución. Nash probó la existencia de una única solución satisfaciendo ciertos axiomas. Desde entonces, otros investigadores han modificado y extendido los axiomas originales de Nash introduciendo conceptos de solución alternativos. Por ejemplo, Harsanyi y Selten (1972) introdujeron la solución de Nash no simétrica que permite la consideración de jugadores con diferentes niveles en el poder de negociación. En 1975, Kalai y Smorodinsky introducen una modificación en la cual se sustituye el axioma de independencia de las alternativas irrelevantes por el axioma de monotonía. En 1988 Chun, introduce la solución de igual pérdida y en 1993 Anbarci, desarrolla la solución de área monótona.

Matemáticamente, un problema de negociación se define por un par  $(X, d)$  donde  $X \subseteq \mathbb{R}^2$  representa el conjunto de pagos factibles y  $d$  es un punto de  $X$  denominado punto de desacuerdo y que representa las consecuencias que supone que los jugadores no sean capaces de alcanzar un acuerdo. Habitualmente se supone que se maximizan las funciones de pagos. En otro caso, se consideran las negativas de éstas. Se supone que el conjunto  $X$  es convexo, cerrado y que si  $x \in X$  y  $y \leq x$  entonces  $y \in X$ . Dado que un jugador racional no aceptará un pago peor que el correspondiente al que obtendría si no se llega a un acuerdo, sólo se consideran pagos factibles aquellos que cumplen  $x \geq d$ . Denotaremos por  $F$  al conjunto de ellos.

Supongamos que tenemos una representación paramétrica de la frontera eficiente donde las funciones que parametrizan la curva son estrictamente monótonas y continuas. Sea  $(x_1(t), x_2(t))$ , con  $t \in I$ , e  $I$  es un intervalo de  $\mathbb{R}$ , una parametrización de la frontera eficiente. Dado que tenemos un punto de desacuerdo  $d$ , la zona de pagos factibles queda limitada por las coordenadas de dicho punto. En la figura 3 se ilustra esta situación. Si consideramos la frontera eficiente, el conjunto de pagos queda limitado a los puntos de la curva comprendidos entre  $A$  y  $B$ . El conjunto de todos los pagos factibles  $F$  aparece representado en la gráfica.



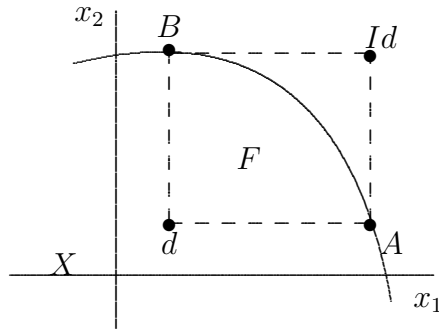


Figura 3: Pagos factibles

Los puntos  $A$  y  $B$  se obtienen precisamente para dos valores  $t_1, t_2 \in I$  tales que  $A = (x_1(t_1), d_2)$  y  $B = (d_1, x_2(t_2))$ . Observemos que la continuidad y la monotonía de la parametrización implica la existencia de estos valores que se pueden encontrar con un sencillo algoritmo sabiendo que verifican las condiciones  $x_2(t_1) = d_2$  y  $x_1(t_2) = d_1$ . Supongamos que  $t_1 < t_2$ , lo que no supone pérdida de generalidad, y sea  $J = [t_1, t_2]$ .

La solución de negociación de Nash regular se caracteriza como el único punto de la frontera de Pareto que maximiza el producto de Nash, es decir, la diferencia entre los pagos factibles y los valores del desacuerdo. La solución de Nash será entonces la solución del problema

$$\max_{x \in F} (x_1 - d_1)(x_2 - d_2).$$

Si los jugadores tienen distinto poder de negociación  $w_1, w_2 \in \mathbb{R}$ , donde  $w_1 + w_2 = 1$ , podemos considerar la solución de Nash generalizada  $x_N$  que se puede caracterizar como el punto que resuelve el problema

$$\max_{x \in F} (x_1 - d_1)^{w_1} (x_2 - d_2)^{w_2}.$$

La solución de Nash regular es un caso particular de la generalizada cuando los poderes de negociación son iguales. Dado que hemos considerado la frontera eficiente en forma paramétrica, el problema que debemos resolver se puede plantear como el

siguiente de maximización en una variable,

$$\max_{t \in J} (x_1(t) - d_1)^{w_1} (x_2(t) - d_2)^{w_2}.$$

Para la solución de Nash,  $d$  es el punto de referencia respecto al cual se calcula la solución. La solución de Kalai-Smorodinsky utiliza dos puntos de referencia, el de desacuerdo  $d$  y el punto ideal  $Id = (Id_1, Id_2)$ , (ver figura 3) que es un punto no factible que recoge los pagos máximos a los que pueden aspirar los dos jugadores. La solución de Kalai-Smorodinsky se obtiene como el punto de la frontera eficiente que está en la recta que une el punto de desacuerdo con el punto ideal. Es decir, el punto de la frontera eficiente que verifica la ecuación

$$x_2 - d_2 = \frac{d_2 - Id_2}{d_1 - Id_1} (x_1 - d_1).$$

Si un objetivo tiene mayor importancia que otro, debería aumentar más rápidamente. Esta idea se recoge en la solución de Kalai-Smorodinsky generalizada. Si los poderes de negociación no son iguales, determinamos la solución de Kalai-Smorodinsky generalizada y consideramos la solución que resulta en la intersección de la frontera eficiente con la recta

$$x_2 - d_2 = \frac{w_2}{w_1} (x_1 - d_1).$$

Obsevemos que la solución generalizada no coincide con la anterior en el caso en que  $w_1 = w_2$ . Ambas soluciones coinciden si la pendiente de la recta que une el punto ideal y el de desacuerdo es uno. En este trabajo vamos a considerar la solución generalizada. Dada la representación paramétrica de la frontera, debemos encontrar el valor de  $t \in J$  tal que

$$x_2(t) - d_2 = \frac{w_2}{w_1} (x_1(t) - d_1).$$

Se trata de una ecuación de una variable que se puede resolver utilizando un método como el de bisección.

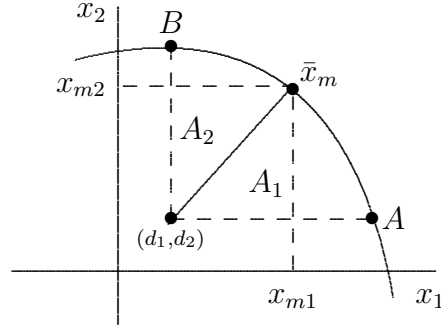


Figura 4: Solución de área monótona

La solución de igual área  $x_m = (x_{m1}, x_{m2})$  es el único punto de la frontera eficiente tal que el segmento de extremos  $d$  y  $x_m$  divide a  $F$  en dos partes de igual área (ver figura 4). Si el conflicto no es simétrico, entonces consideramos la solución de igual área generalizada de tal forma que la relación entre las áreas es  $\frac{w_1}{w_2}$ ; es decir,  $A_1 w_1 = A_2 w_2$ . En este caso, la solución generalizada coincide con la anterior cuando los poderes de negociación son iguales.

Sea  $S_1$  el área limitada por la gráfica de la frontera eficiente entre  $x_m$  y  $A = (x_1(t_1), d_2)$ , el eje  $x$  y las rectas  $x_1 = x_{m1}$  y  $x_1 = x_1(t_1)$ . Se tiene entonces que

$$A_1 = \frac{1}{2}(x_{m2} - d_2)(x_{m1} - d_1) + S_1 - d_2(x_1(t_1) - x_{m1}).$$

Por otra parte, sea  $S_2$  el área limitada por la gráfica de la frontera eficiente entre  $B = (d_1, x_2(t_2))$  y  $x_m$ , el eje  $x$  y las rectas  $x_1 = d_1$  y  $x_1 = x_{m1}$ . En esta situación,

$$A_2 = S_2 - \frac{x_{m2} + d_2}{2}(x_{m1} - d_1).$$

Dado que en el juego objeto de estudio, tenemos una representación paramétrica de la frontera eficiente, para el cálculo de las áreas  $S_1$  y  $S_2$  podemos utilizar un método de integración numérica, como por ejemplo la regla de los trapecios. Aunque no disponemos de una ecuación explícita, podemos determinar los puntos sobre la curva que sean necesarios para obtener el área con la precisión deseada.

Por último, en la solución de igual pérdida, determinamos el punto de la

frontera eficiente donde los dos jugadores asumen la misma pérdida con respecto a su situación ideal. Del mismo modo que en los casos anteriores, podemos asumir diferencias de importancia en los objetivos y considerar que la relación entre las pérdidas tenga que ser igual a la relación entre los poderes de negociación. Por lo tanto, consideramos como solución, el punto de la frontera eficiente que verifica la ecuación:

$$(x_1 - Id_1)w_1 = (x_2 - Id_2)w_2.$$

Análogamente al caso de la solución de Kalai-Smorodinsky, debemos resolver una ecuación en la variable  $t$ .

#### 4. Ejemplo numérico

En esta sección se presenta un ejemplo numérico para unos valores determinados de los parámetros, en los que se ilustran los resultados que se obtienen con las diferentes soluciones analizadas en la sección anterior. El horizonte temporal elegido ha sido de  $T = 20$  años para recoger aproximadamente el intervalo temporal establecido en el protocolo de Kyoto, sobre el objetivo de la reducción de emisiones del 5% respecto a las del año 1990. El resto de los parámetros del modelo son  $\rho = 0.05, \sigma = 0.5, \beta = 0.005, c_1 = 5, c_2 = 10, d_1 = 2, d_2 = 10, e_1^m = 10$  y  $e_2^m = 15$ . Las diferencias significativas existentes en los costes, pretenden recoger la diferencia de posición de las coaliciones ante la contaminación ambiental. En cuanto a los parámetros medioambientales, se han tomado los valores sugeridos en el trabajo de Katiala y Pohjola.

En las figuras 5, 6, 7 y 8 se ilustran las distintas soluciones para los diferentes métodos de solución de conflictos aplicados. Se presentan los resultados considerando diferentes poderes de negociación de los jugadores. Los resultados se ilustran sobre la frontera de Pareto para el problema inicial de minimización. El punto señalado con \* en las gráficas corresponde al punto de desacuerdo considerado. A la izquierda de cada gráfica se presenta una tabla que muestra los resultados numéricos. A la vista de las gráficas se deduce fácilmente que no hay

Poder $I_1$	Poder $I_2$	Pago $I_1$	Pago $I_2$
0	1	10000	2948.2
0.1	0.9	8883	3871.7
0.2	0.8	7779.3	4982.2
0.3	0.7	6705.7	6294
0.4	0.6	5682.1	7812.1
0.5	0.5	4728.8	9528.2
0.6	0.4	3863.8	11420
0.7	0.3	3099.4	13452
0.8	0.2	2440.2	15585
0.9	0.1	1884.4	17779
1	0	1424.7	20000

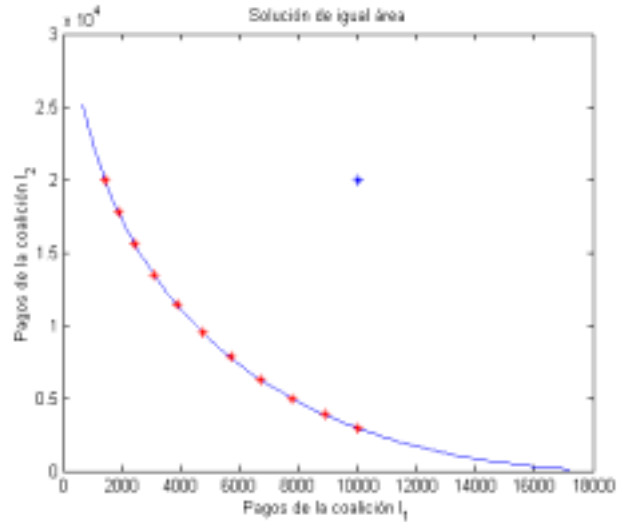


Figura 5: Pagos de las dos coaliciones cuando se considera la solución de igual área generalizada y distintos poderes de negociación.

Poder $I_1$	Poder $I_2$	Pago $I_1$	Pago $I_2$
0	1	10000	2948.2
0.1	0.9	8273.2	4458.4
0.2	0.8	6607	6428
0.3	0.7	5160.9	8708.8
0.4	0.6	4025.2	11038
0.5	0.5	3189.8	13190
0.6	0.4	2590.5	15060
0.7	0.3	2159.2	16640
0.8	0.2	1843.2	17961
0.9	0.1	1606.3	19067
1	0	1424.7	20000

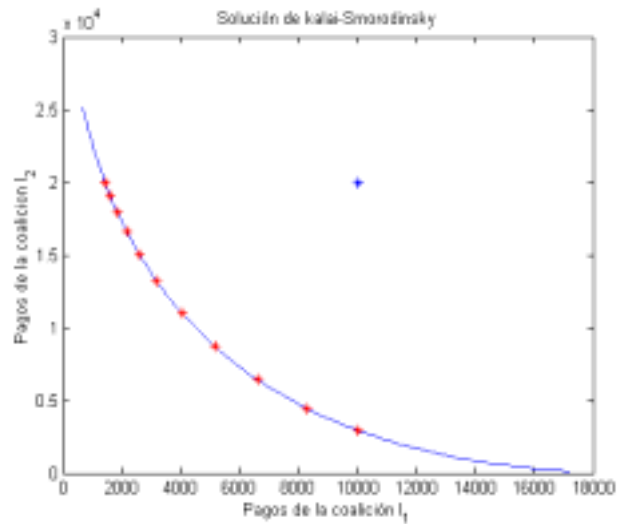


Figura 6: Pagos de las coaliciones cuando se considera la solución de Kalai-Smorodinsky generalizada y distintos poderes de negociación.

mucha diferencia entre los diferentes métodos de solución. En todos los casos, no hay zonas de acumulación de soluciones, si no más bien al contrario, están distribuidas de forma relativamente homogénea sobre la frontera eficiente. Como se puede observar por los datos recogidos en las tablas, el punto de desacuerdo elegido para los cálculos ha sido  $(d_1, d_2) = (10000, 20000)$ . Para este punto de amenaza, los valores de  $\alpha$  que generan puntos del conjunto factible son los del intervalo  $[0.4277, 0.8428]$  y el punto ideal del juego es  $(1424.7, 2948.2)$ .

Poder $I_1$	Poder $I_2$	Pago $I_1$	Pago $I_2$
0	1	10000	2948.2
0.1	0.9	8291	4440.3
0.2	0.8	7133.9	5740.1
0.3	0.7	6215.5	6984.4
0.4	0.6	5430.2	8233.8
0.5	0.5	4726.4	9532.9
0.6	0.4	4072.7	10928
0.7	0.3	3445.3	12483
0.8	0.2	2821.9	14299
0.9	0.1	2171.9	16590
1	0	1424.7	20000

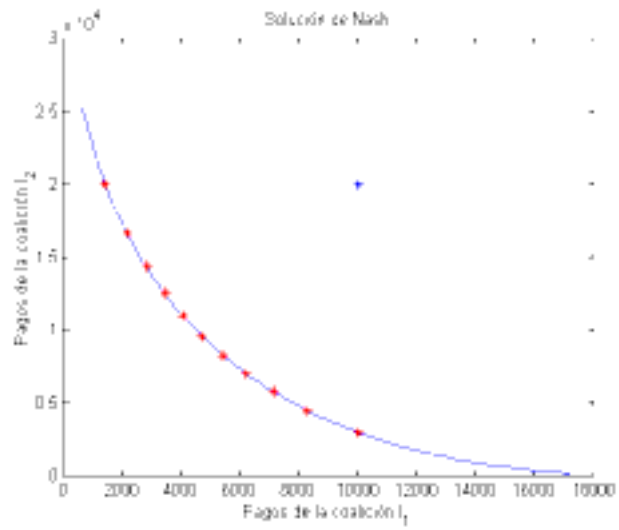


Figura 7: Pagos cuando se considera la solución de Nash generalizada y distintos poderes de negociación.

Poder $I_1$	Poder $I_2$	Pago $I_1$	Pago $I_2$
0	1	10000	2948.2
0.1	0.9	8976.4	3787.3
0.2	0.8	8115.3	4620.9
0.3	0.7	7343.2	5484.7
0.4	0.6	6619.3	6411.2
0.5	0.5	5915.7	7439.2
0.6	0.4	5208.2	8623.5
0.7	0.3	4470.5	10055
0.8	0.2	3665.2	11910
0.9	0.1	2721.8	14622
1	0	1424.7	20000

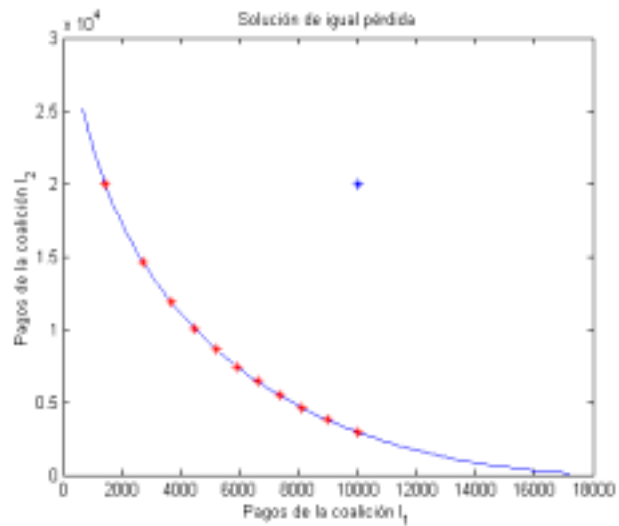


Figura 8: Pagos cuando se considera la solución de igual pérdida y distintos poderes de negociación.

## 5. Conclusiones

En este trabajo se estudia un juego diferencial biperpersonal donde los agentes son dos bloques de coaliciones internacionales afectadas por un problema de contaminación medioambiental por exceso de  $\text{CO}_2$ . Los jugadores deben soportar costes que dependen del nivel de sus emisiones a la atmósfera y de la concentración del  $\text{CO}_2$  existente. Se resuelve el problema de determinar el nivel de emisiones que permitan minimizar los costes en un horizonte temporal  $T$ , suponiendo que los costes admiten una modelización cuadrática. Se pretende recoger la diferencia de las coaliciones ante la contaminación asignando diferentes parámetros a las funciones de costes. Una vez planteado el juego se estudian los diferentes tipos de estrategias que se pueden seguir si los bloques deciden llevar a cabo un proceso de negociación mediante la ponderación de sus objetivos. En el trabajo también se determinan distintas soluciones de negociación considerando diferentes pesos para cada uno de los jugadores. Por último, se plantea un desarrollo numérico para mostrar la metodología empleada.

## Bibliografía

1. Anbarci, N.(1993):“Noncooperative foundations of the area monotonic solution”. *Quarterly Journal of Economics*, Vol. 108, 245-258.
2. Basar, T. and G. J. Olsder (1995): *Dynamic Non Cooperative Game Theory*. Academic Press.
3. Chun, Y. (1998): “The equal loss principle for bargaining problems”, *Economics Letters*, Vol. 26, 103-106.
4. Ghoseiri, K., Szidarovszky, F. and Asgharpour, M. J. (2003): “A two-person conflict model in train scheduling”. *International Game Theory Review*, Vol. 5, No 2, 105-125.
5. Kaitala, V. and M. Pohjola (1995): “Sustainable International Agreements on Greenhouse Warming. A game Theory Study”. *Control and Game-Theoretic*

*Models of the Environment*, Carraro, C. and J. A. Filar Ed., Birkhäuser, Boston, pp. 67-87.

6. Kalai, E. and Smorodinsky (1975): "Other solutions to Nash's bargaining problem". *Econometrica*, Vol. 43, pp. 513-518.
7. Nash, J. F. (1950): "The bargaining problem," *Econometrica*, Vol. 18, 155-162.
8. Protocolo de Kyoto (2002): *Diario oficial de las Comunidades Europeas 15.05.02*, pp. L130/1-L130/20.